Aufgabe 6

Das Kronecker-Symbol transformiert sich folgendermassen:

$$\delta_{ij} \overset{\text{Def. Tensor}}{\rightarrow} R_{il} R_{jm} \delta_{lm} = R_{il} R_{jl} = (RR^T)_{ij} \overset{\text{Orthogonal}}{=} \delta_{ij}$$

Das Levi-Civita-Symbol transformiert sich so:

$$\epsilon_{ijk} \rightarrow R_{il} R_{jm} R_{kn} \epsilon_{lmn}$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
\epsilon_{ijk} &= R_{il} R_{jm} R_{kn} \epsilon_{lmn} \\
\Leftrightarrow \forall a, b, c : a_i b_j c_k \epsilon_{ijk} &= a_i b_j c_k R_{il} R_{jm} R_{kn} \epsilon_{lmn} \\
\Leftrightarrow \forall a, b, c : \det((a|b|c)) &= \det\left(R^{-1}(a|b|c)\right) \\
\Leftrightarrow \forall a, b, c : \det((a|b|c)) &= 1/\det(R)\ \det((a|b|c)) \\
&\quad \square
\end{aligned}$$

Das Vektorprodukt transformiert sich aus dem gleichen Grund wie ein Vektor unter der Drehung:

$$\begin{aligned}
(b \times c)_i = \epsilon_{ijk} b_j c_k &\rightarrow \epsilon_{ijk} R_{jl} R_{km} b_l c_m && (1) \\
&= R_{is} \underbrace{R_{rs} \epsilon_{rjk} R_{jl} R_{km}}_{=\epsilon_{slm}} b_l c_m && (2) \\
&= R_{is} (b \times c)_s && (3)
\end{aligned}$$

Unter Raumspiegelungen ändert die Determinante ihr Vorzeichen, das Vektorprodukt jedoch nicht. $a \times b$ ist ein Axialvektor oder Pseudovektor; Beispiel: Drehimpuls $r \times p$. Wenn man ein sich drehendes Rad an seiner Mitte punktspiegelt, dreht es sich immernoch in die gleiche Richtung.

Aufgabe 7

Die Definition der Winkel eines Bezugssystems nach DIN9300 gibt in der ersten Drehung um die z-Achse die Ausrichtung (Flugrichtung) an, in der zweiten Drehung um die y-Achse des Flugzeugs die Steigung, und in der dritten Drehung die seitliche Neigung. Die Drehmatrizen schauen aus wie gewohnt:

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ 0 & -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \quad R_2 = \begin{pmatrix} \cos(\beta) & 0 & -\sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{pmatrix} \quad R_3 = \begin{pmatrix} \cos(\gamma) & \sin(\gamma) & 0 \\ -\sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Hintereinanderausfuehrung liefert:

$$R_1 R_2 R_3 = \begin{pmatrix} \cos(\beta)\cos(\gamma) & \cos(\beta)\sin(\gamma) & -\sin(\beta) \\ \cos(\gamma)\sin(\alpha)\sin(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\gamma) & \cos(\alpha)\cos(\gamma) + \sin(\alpha)\sin(\beta)\sin(\gamma) & \cos(\beta)\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha)\sin(\gamma) + \cos(\alpha)\cos(\gamma)\sin(\beta) & -\cos(\gamma)\sin(\alpha) + \cos(\alpha)\sin(\beta)\sin(\gamma) & \cos(\alpha)\cos(\beta) \end{pmatrix}$$

Als Produkt von drei orthogonalen Matrizen ist diese Matrix wieder orthogonal, und damit ist

$$(R_1 R_2 R_3)^{-1} = (R_1 R_2 R_3)^T = R_3^T R_2^T R_1^T$$

Aufgabe 8

$\{SO(N), \cdot\}$ ist eine Gruppe

1. Neutrales Element (Einheitsmatrix): $A \cdot E = A$
2. Inverses: $A \in SO(N) \to A^T \in SO(N)$ und $AA^T = A^T A = E$
3. Abgeschlossen: Aus $A^T = A^{-1}$ und $B^T = B^{-1}$ folgt $(AB)^T = B^T A^T = B^{-1} A^{-1} = (AB)^{-1}$ desweiteren folgt aus $\det A = 1$ und $\det B = 1$ auch $\det AB = \det A \det B = 1$
4. Assoziativ: $A(BC) = (AB)C$ nach Gesetzen der Matrixmult.

$SO(2)$ ist Abelsch: Betrachte Darstellung durch 2×2 Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma \\ -\sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix}$$

Nun ist

$$AB = BA = \begin{pmatrix} \cos(\gamma)\cos(\theta) - \sin(\gamma)\sin(\theta) & \cos(\theta)\sin(\gamma) + \cos(\gamma)\sin(\theta) \\ -\cos(\theta)\sin(\gamma) - \cos(\gamma)\sin(\theta) & \cos(\gamma)\cos(\theta) - \sin(\gamma)\sin(\theta) \end{pmatrix}$$

$SO(3)$ ist Nichtabelsch, ein Gegenbeispiel in der Darstellung mit 3×3-Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Dann ist

$$AB = \begin{pmatrix} \cos^2(\theta) & \sin(\theta) & \cos(\theta)\sin(\theta) \\ -\cos(\theta)\sin(\theta) & \cos(\theta) & -\sin^2(\theta) \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad BA = \begin{pmatrix} \cos^2(\theta) & \cos(\theta)\sin(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ -\cos(\theta)\sin(\theta) & -\sin^2(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$